

# Física y matemáticas para entender los embotellamientos de

Leonardo M. Castro González  
Facultad de Ciencias, UNAM

Presentado por J. Antonio del Río,  
Instituto de Energías Renovables  
Academia de Ciencias de Morelos

## Presentación

Leonardo es un físico recientemente graduado de la Facultad de Ciencias de la UNAM. Le interesa hacer investigación y le preocupa y se ocupa por divulgar el conocimiento científico. Este texto fue motivado por su deseo de explicar en forma sencilla el comportamiento complejo de sistemas no físicos usando herramientas de la física, lo cual fue su motivación para realizar su tesis de licenciatura sobre el tema de tránsito vehicular.

## Introducción

El otro día llevé a mi abuelo a un chequeo médico. Era un día normal en la ciudad, por lo que había mucho tráfico. En la radio no había nada bueno y tanto mi abuelo como yo ya no teníamos temas de conversación en mente. Eran esos momentos en los que podía surgir la plática incómoda. "Mijito, me preocupa tu carrera. ¿De qué vive uno cuando se estudia física?" soltó mi abuelo, cual verdugo. No lo esperaba, no podía huir, no podía abandonar mi coche y no podía evadir la pregunta. Estaba atrapado. Pero mi respuesta surgió de ahí, del mismo embotellamiento que estábamos viviendo. Le expliqué que dada la complejidad del problema, con herramientas de física y matemáticas se podían explicar este tipo de fenómenos. Le comenté que al poder explicarlos los entendemos y con ello podemos encontrar soluciones. Además, con estas explicaciones podía generar conocimiento y encontrar trabajo para poder vivir. No me creyó; que -según él- el problema del tránsito era trivial y que la solución era simple: no dar más permisos a los taxis... Ok abuelo. Sí, abuelo. En fin... Tal vez le dé este texto a mi abuelo. Ojalá que, ya sin el enojo del embotellamiento, pueda apreciar lo que le digo. Las matemáticas y la física tienden a asustar a las personas porque parecen temas difíciles de entender, aunque por lo general todo empieza imaginando situaciones sencillas, como esta que narro a continuación.

## Parte I: matemáticas y embotellamientos

Los pájaros cantan, el sol alumbra los árboles, y sobre todo, las calles están vacías. Es un domingo por la mañana. Al tomar el coche, todos los semáforos están en verde y no hay, en principio, nada que nos detenga, por lo que podemos

acelerar todo lo que queramos. De repente, un gran camión sale de la nada. Habrá que frenar si es que uno no quiere terminar en el hospital.

¿Qué acaba de pasar? Pues no mucho, solo acelerar y frenar. Pues sí, solo eso. Pero sus consecuencias son más grandes de lo imaginado. En realidad acabamos de descubrir los *dos principios básicos* que cualquier conductor racional sigue.

El primero se refiere a la aceleración: *Cualquier conductor irá a la máxima velocidad posible*. Si el coche, el reglamento de tránsito y las habilidades del propio estilo de conducir permiten ir a 120 km/h en una carretera, lo hace. Es algo bastante intuitivo. El segundo se refiere a la desaceleración: *Cualquier conductor frenará solo si es necesario*; como para, tal vez, salvar su vida o la de alguien más en un accidente de tránsito porque viaja a 120km/h y un choque a esta velocidad mata a mucha gente.

Si el coche no está en buenas condiciones o al conductor simplemente no le gusta ir demasiado rápido, entonces la velocidad más alta será aquella que el coche o el sentido común permitan. Estos principios son bastante intuitivos (de ahí lo de "principios") aunque son bastante útiles para empezar un análisis de la dinámica vehicular.

Imaginemos una carretera de un único carril donde no se puede rebasar. Dos coches van circulando por ella tranquilamente. La posición de estos coches irá avanzando conforme transcurre el tiempo. Podemos observar dicho avance en un diagrama *espacio-temporal* como el que muestra la Figura 1.

Las dos curvas nos señalan las trayectorias de cada vehículo según su color. En los primeros segundos observamos como estos circulan a una cierta velocidad. En el segundo 10, el vehículo azul frena. Poco después el vehículo verde se ve obligado a disminuir su velocidad para evitar un accidente. Estos dos eventos pueden verse en la gráfica como la esquina que se forma en la curva azul (el frenado total) y la curvatura de la línea verde (el frenado para no chocar).

Después de estos segundos, cada uno vuelve a acelerar, hasta de nuevo alcanzar la velocidad anterior al frenado. Las curvas también parecen estar mucho más juntas después del incidente, ¿no es así? Esto es simplemente una consecuencia del evento durante el cual el vehículo verde se acercó al azul.

Hasta aquí la historia de estos dos conductores. ¿Qué pasaría si este evento ocurriera en una carretera muy transitada?

El vehículo azul frenaría. El verde también, como ya vimos. El vehículo detrás del verde, también lo haría por motivos similares y aquel atrás de este último, también. Creo que ya saben hacia donde voy. Se crea una reacción que afectará a todos aquellos vehículos que estén en fila. Como ya vimos en la Figura 1, después del frenado los primeros vehículos siguen su camino, aunque unos segundos después y unos metros atrás frenaría el tercer vehículo y luego el cuarto y así sucesivamente.

El freno total del vehículo azul provoca una reacción forzando a los vehículos de atrás a disminuir su velocidad. Esta reacción viaja

en el tiempo y en el espacio. Entonces, el que un vehículo frene completamente en una carretera llena de automóviles provoca un movimiento específico que los físicos llamamos *frente de onda* que viaja en el espacio y en el tiempo disminuyendo la velocidad de los coches por los cuales pasa. En la Figura 2 se muestra como se ve uno de estos *frentes*.

Aquí viene lo más curioso. En la Figura 2 podemos ver cómo al tiempo  $t=470s$ , el *frente de onda* se encuentra en  $X=50$  metros y el vehículo que originó este fenómeno ya ha salido del diagrama. Es decir que este vehículo "origen" no se enteró de lo que ha provocado al frenar tan súbitamente, y el vehículo que ha disminuido su velocidad minu-

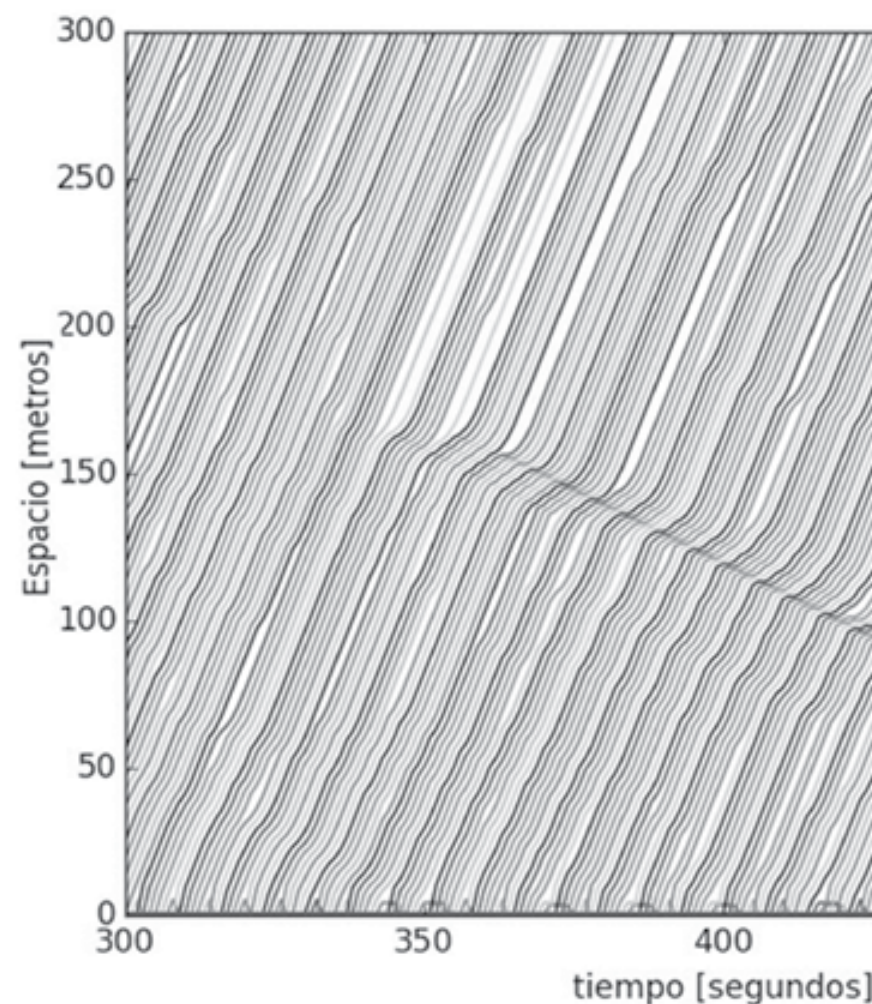


Figura 2: Diagrama espacio-temporal de una gran cantidad de vehículos en una carretera de un carril.

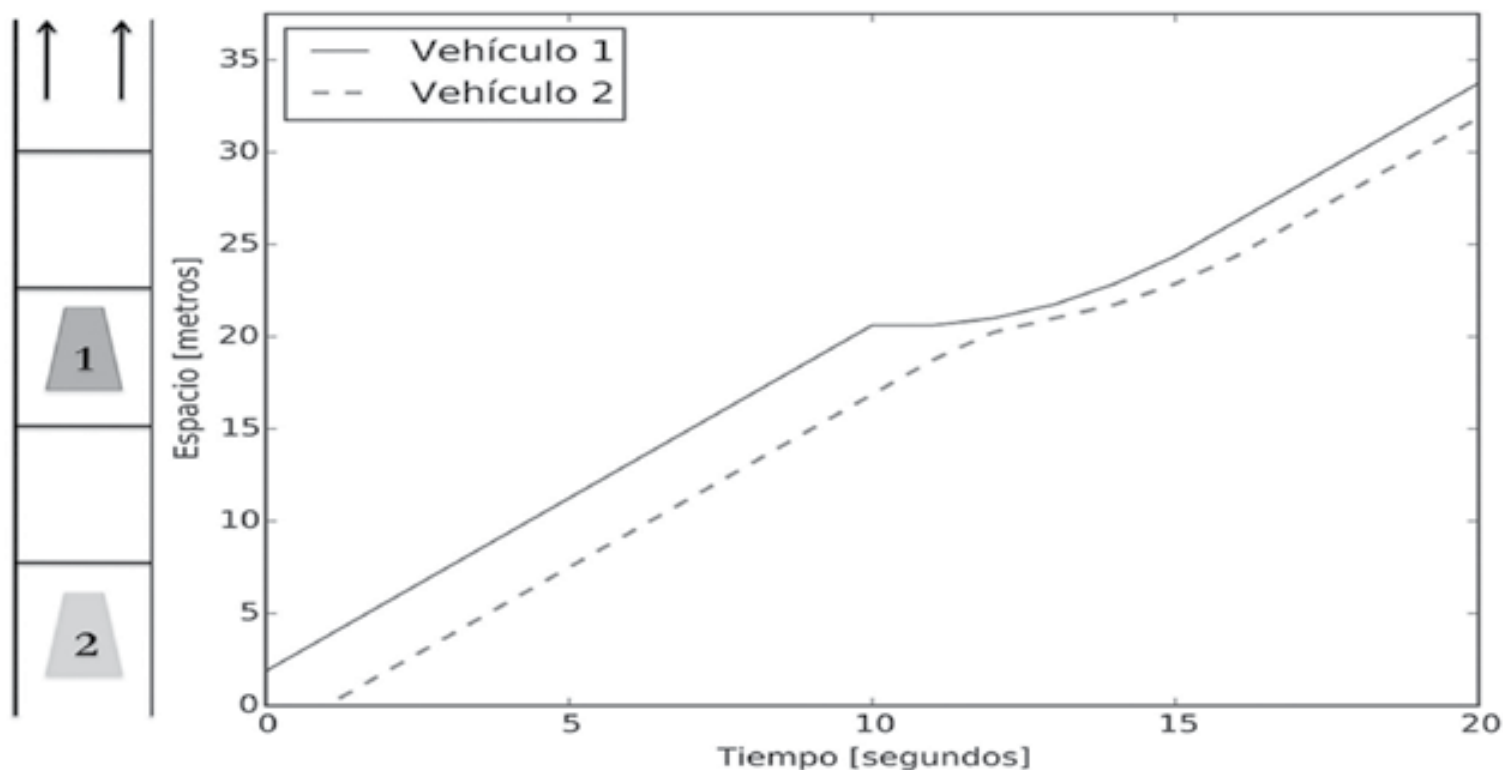


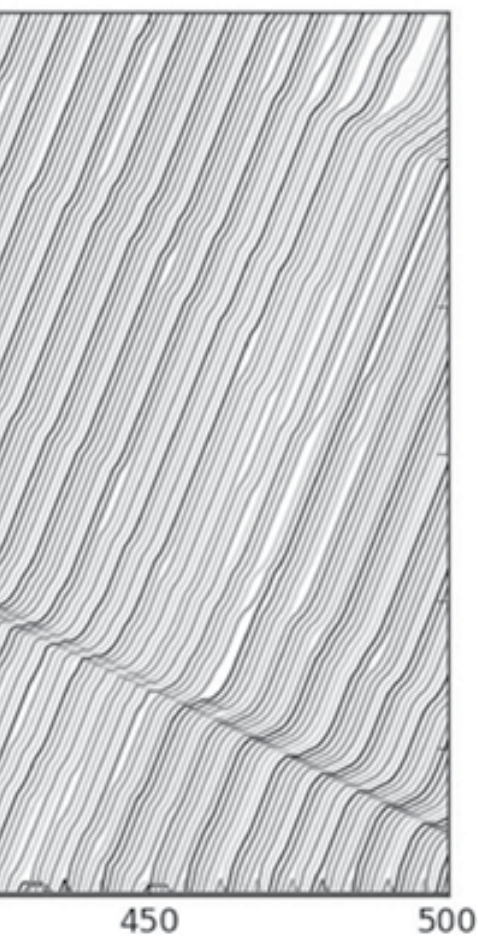
Figura 1: diagrama espacio-temporal de dos vehículos en una carretera de un carril, la línea azul indica el avance del auto 1 y la verde el del auto 2.





## una carretera

tos después tampoco se entera de quién o qué ha provocado el *frente de onda*. ¿Suena conocido? Esto es algo que una gran cantidad de personas ha experimentado: Uno circula tranquilamente a una velocidad considerable cuando sin aviso se encuentra con un gran congestionamiento. Pasan minutos circulando a una velocidad mínima, e incluso pa-



rando por momentos. "Tiene que haber pasado algo adelante", se dice uno a sí mismo, tratando de tranquilizarse. Ve la hora, revisa las noticias, twitter, etc. No concibe cómo es posible este atasco en un camino que parecía tan fluido. Avanza unos cientos de metros y como por arte de magia, el congestionamiento se desvanece y ¡bum!, todo vuelve a la normalidad. No pasó nada. No hay accidentes ni cierres viales, nada. Uno acelera de nuevo, dejando todo atrás, viendo por el retrovisor tratando de entender qué acaba de ocurrir.

Pues ya saben qué es lo que pasa. Tal vez minutos, e incluso horas antes, algún conductor o conductora tuvo que frenar súbitamente, provocando así el inicio de un *frente de onda* que permaneció por esa calle, propagándose por esta y disminuyendo la velocidad de los vehículos, incluyendo el propio.

Para esta descripción solo hizo falta un poco de matemáticas: saber cómo relacionar la posición con el tiempo, y ya. Ahora pase-

mos a otro fenómeno que ocurre en las calles a diario llamado *inversión de carriles*. Para describir este fenómeno hablaremos de densidades y flujos, que ya discutimos en el artículo de la semana pasada en el que describimos un modelo de tránsito con autómatas celulares [1].

### Parte II: mejor quédate en el carril de baja

Es común ver a conductores que se cambian una y otra vez de carril, tratando de estar siempre en el carril CON más flujo de autos. También es muy común, al cambiar de carril, tener que detenerse mientras que nos rebasan los carros del carril que abandonamos.

blamos de cómo el aumentar la densidad de una carretera lleva en un momento dado a disminuir el flujo, disminuyendo la velocidad y por lo tanto también la cantidad de vehículos circulando. De esta manera, el carril izquierdo se vuelve más lento que el derecho. A este fenómeno se le conoce como *inversión de carriles*, y se refiere a una migración importante de vehículos de un carril lento a otro más rápido, congestionando la dinámica e *invirtiendo* el carril con menor velocidad con el de mayor velocidad. En la Figura 3 encontramos dos gráficas explicando el ejemplo anterior.

ciendo que en el "carril de baja", que en este caso es el izquierdo, haya un mayor flujo. En esta simulación la densidad de vehículos aumenta hasta poder llegar a un punto de equilibrio, haciendo que haya la misma cantidad de coches en cada carril. Sin embargo, en la vida cotidiana el comportamiento visto entre 5 y 40 vehículos por km por carril en la Figura 3 se puede repetir e invertir a lo largo del tiempo, haciendo que los distintos carriles inviertan su lugar como aquel con mayor flujo, debido básicamente a este comportamiento de siempre querer cambiarse de carril. Este fenómeno pasa por lo general en circuitos de las grandes

mos una visión más clara de la dinámica del tránsito.

Una carretera o una red de calles son sistemas de una gran riqueza en cuanto a los fenómenos que presentan por su complejidad, como los curiosos fenómenos de inversión de carriles y creación de frentes de onda. Su análisis puede aplicarse a situaciones reales para mejorar la movilidad de las ciudades alrededor del mundo.

A este tipo de sistemas se les conoce como *sistemas complejos*. No hay una definición formal de estos, aunque lo mencionado en el artículo anterior sirve para dar una primera aproximación. Los vehículos tienen un comportamiento relativamente sencillo:

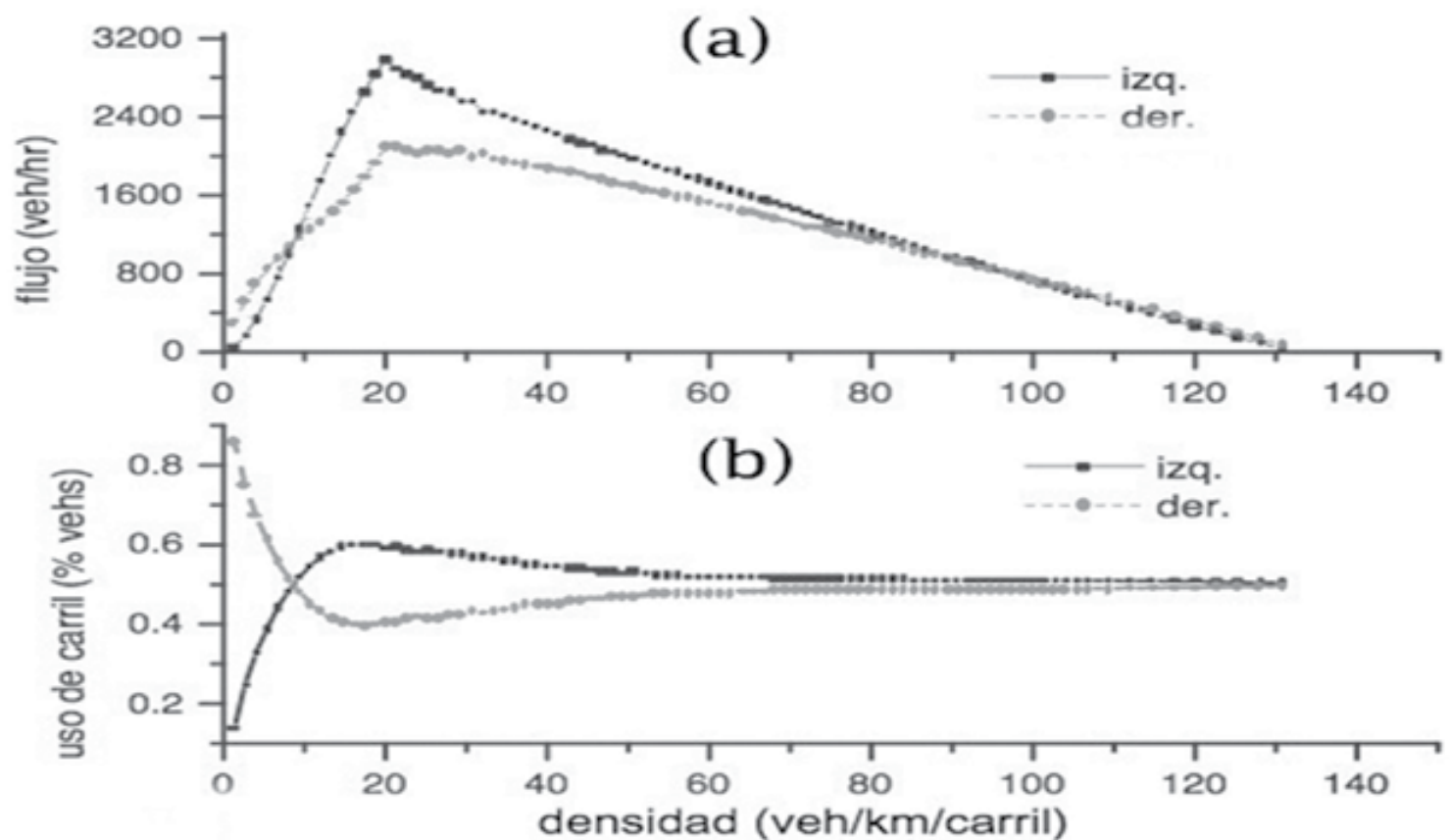


Figura 3: gráfica del porcentaje de vehículos en cada carril cuando se da una inversión de estos. Diagramas obtenidos de [2].

"¡Me debí de haber quedado en donde estaba!" piensa el conductor mientras regresa al carril original. La historia se repite, ahora es aquel carril al que se había cambiado originalmente el que empieza a circular de nuevo y el carril original el que se detiene. "¡Caray!".

¿Qué ocurre aquí? En países como México en los que se prohíbe rebasar por la derecha, imaginamos al carril del extremo derecho como el "carril de baja" donde circulan los vehículos lentos, mientras que el del extremo izquierdo sería el "carril de alta" por el que rebasan los vehículos veloces.

¿Qué ocurre entonces cuando encontramos un flujo congestionado? Aquellos que estén en el carril derecho tenderán a cambiarse hacia el carril izquierdo pensando que así irán más rápido. Esto ocasiona que el carril izquierdo se llene más, aumentando su densidad. Ya en un artículo anterior [1] ha-

Para las simulaciones en la Figura 3 todos los vehículos empiezan en el carril derecho, suponiendo que este sea el "carril de alta" en una carretera. En la Figura 3a se muestran los diagramas fundamentales para cada carril, describiendo el estado del flujo, tal como se discutió en el artículo de la semana pasada [1]. En la Figura 3b se observa el porcentaje de vehículos en cada uno de los carriles con respecto a la densidad en la carretera.

Cuando en la carretera hay una mínima cantidad de vehículos, la gran mayoría de estos circulan por el carril derecho. Sin embargo, entre más vehículos insertemos en la carretera, los coches ya no podrán circular tan libremente, por lo que algunos se cambiarán al carril izquierdo. El carril derecho sigue siendo aquel con un mayor flujo hasta tener una densidad de 10 vehículos por km por carril. En este punto, debido a la cantidad de coches en la carretera, se realizará la inversión de carriles, ha-

ciudades como periféricos, viaductos o distribuidores viales. En horas pico la velocidad entre los carriles tiende a variar por la continua migración de vehículos entre los distintos carriles. Sin embargo, puede haber situaciones donde permanecer en el "carril de baja" puede resultar en un recorrido más breve.

Así que, si ustedes circulan regularmente por algún distribuidor, viaducto o periférico, ya tienen un pequeño experimento que hacer para matar el tiempo: ¿por cuál carril se llega más rápido al destino?

### Recapitulando...

Con conceptos básicos e intuitivos de física y matemáticas, como velocidad y densidad, describimos distintos fenómenos dentro de carreteras y calles los cuales mucha gente vive cotidianamente. Explicamos el origen de aquellos estancamientos que aparentemente no son causados por nada. También describimos la inversión de carriles y obtuvi-

se mueven en dos dimensiones y cumplen los dos principios ya vistos. Al colocar uno, dos o tres vehículos en una carretera no pasará nada interesante. Sin embargo, a la hora de colocar cientos o miles de automóviles en la carretera, la dinámica se vuelve tan complicada como ustedes la conocen. En la actualidad, este es uno de los grandes problemas ambientales, sociales y hasta económicos en las ciudades.

### Referencias:

- [1]: Castro L.M., del Río J.A., "Carreteritas con autómatas celulares", La Ciencia desde Morelos para el mundo, Academia de Ciencias, 23 de mayo 2016. <http://www.acmor.org.mx/?q=content/carreteritas-con-aut%C3%B3matas-celulares>
- [2]: Lárraga M.E., Tesis Doctoral, "Un modelo de autómatas celulares para el tránsito vehicular en carreteras", Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México (2004).