ACADEMIA DE CIENCIAS DE MORELOS, A.C.

¿Comentarios y sugerencias?, ¿Preguntas sobre temas científicos? CONTÁCTANOS:
edacmor@ibt.unam.mx

Usted es desafinado

(parte 2 de 2)

W. Luis Mochán: *Instituto de Ciencias Físicas de la UNAM y Academia de Ciencias de Morelos*

Como le dije la semana pasada [1], Ud. es desfinado. No terminé de explicarle cómo lo sé, lo haré en un momento, pero sí le expliqué cómo una cuerda tensa fija en sus extremos vibra no con una, sino con muchas frecuencias $f_n=n\ f_1$, $n=1,2,3...$ que son múltiples enteros de una frecuencia fundamental f_1 que depende de las propiedades de la cuerda, de su tensión y de su longitud. La fundamental determina el tono y la intensidad relativa de sus *armónicos* determina su timbre.

Considere ahora una cuerda *a* de longitud L_a y frecuencia fundamental f^a y otra cuerda *b* del mismo material y sujeta a la misma tensión, pero de la mitad de la longitud $L_b=L_a/2$ y por lo tanto con una fundamental del doble de frecuencia $f^b=2f^a$. Todos los armónicos $n\ f^b=2n\ f^a$ de la cuerda *b* son armónicos *pares* de la primera cuerda; pulsar la segunda cuerda junto con la primera es como pulsar únicamente la primera cuerda, pero cambiando la intensidad de algunos de sus armónicos y por lo tanto modificando su timbre. En cierto sentido, la *nota musical* correspondiente a la segunda cuerda es la misma nota que la correspondiente a la primera cuerda; no hay nada en la segunda nota que no estuviese ya en la primera. Es por esto que ambas notas reciben el mismo nombre. Al intervalo musical entre una y otra se le llama una *octava* por la forma peculiar de contar que tienen los músicos. Si consideramos cuerdas con longitudes $L_a/2$, $L_a/4$, $L_a/8$..., generaremos *la misma nota musical*, pero más aguda que la nota original en una, dos, tres, etc. octavas. Similarmente, cuerdas con longitudes $2\ L_a$, $4\ L_a$, $8\ L_a$... generarán la misma nota pero más grave en una, dos, tres, etc. octavas.

Cambiemos ahora la longitud de la cuerda *b* a $L_b=L_a/3$. Sus armónicos serían de la forma $nf^b=3nf^a$ y por lo tanto, todos sus armónicos coincidirían con armónicos de la primera cuerda, con aquellos cuyo índice sea un múltiplo del número tres. Esta cuerda tampoco proporciona un sonido esencialmente nuevo, pero duplicando su longitud $L_b=2L_a/3$ bajaríamos su frecuencia fundamental una octava y sus armónicos serían de la forma $n\ f^b=3n\ f^a/2$. Note que los armónicos $n=2, 4, 6...$ de esta última cuerda coinciden con los armónicos $n=3, 6, 9...$ de la cuerda original *a*, pero los armónicos $n=1, 3, 5...$ tienen frecuencias *totalmente nuevas*. La nota que acabamos de construir, con fundamental $f^b=3f^a/2$ tiene mucho en común con la nota original de fundamental f^a, pero tiene muchos sonidos nuevos. Hemos construido entonces una nota nueva que armoniza hermosamente con la nota original, con la que está fuertemente relacionada; con ella comparte la mitad de sus armónicos. El intervalo que nos lleva de f^a a f^b se llama una *quinta*. Por ejemplo, si consideramos la nota llamada *La* cuya frecuencia se ha elegido convencionalmente como $f^{La}=440Hz$, su quinta sería la nota llamada *Mi* cuya frecuencia sería $f^{Mi}=660Hz$.

Pida a algún amigo músico que le muestre cómo suena el La y el Mi, que los toque en secuencia y que los toque juntos; estará de acuerdo en que es una pareja de notas que suenan bien. Pitágoras y sus discípulos en la antigua Grecia exploraron otros intervalos musicalmente agradables relacionados con quebrados como la *cuarta* ($^4/_3$), la *tercera mayor* ($^5/_4$), la *tercera menor* ($^6/_5$), etc. Estaban tan entusiasmados de poder generar combinaciones de sonidos agradables al oido utilizando cuerdas cuyas longitudes se hallaban en proporciones dadas por razones de números enteros, que llegaron a postular que todo nuestro universo funcionaba como un instrumento musical cuyas leyes deberían poder describirse matemáticamente. También postularon que todos los números deberían ser *racionales*, es decir, cocientes de números enteros. Después descubrieron que la diagonal de un cuadrado de lado 1 *no era un número racional*, muestra, en su opinión, de que *los dioses había cometido un error al crear al mundo*, secreto que juraron guardar celosamente.

No obstante el entusiasmo de los pitagóricos, su procedimiento para crear *escalas* es algo enredado, poco sistemático y conduce a problemas. Por ejemplo, la quinta de una quinta resulta en una *novena* ($^9/_4$), cuyo subarmónico es una *segunda* ($^9/_8$), la cual difiere del tono inicial en un intervalo llamado *tono*. Dos tonos hacen una tercera $^9/_8\,^9/_8=^{81}/_{64}$, pero *desafinada*, pues la tercera que vimos arriba corresponde a $^5/_4=^{80}/_{64}$ que es menor en apenas $^1/_{64}$.

Una forma sistemática de obtener notas nuevas que armonicen con notas previas es *iterando* el proceso de construir quintas, multiplicando la frecuencia de la nota inicial por $^3/_2$ y repitiendo el proceso a partir de la nota recién construida. En cada paso bajamos la nota una octava dividiendo su frecuencia entre *2* cuando ello nos lleva a una frecuencia más cercana a la nota inicial. Así, si empezamos este proceso con el número *1*, el siguiente número sería $^3/_2=1.5$, pero notamos que si lo *bajamos* una octava lo convertimos en $^3/_2\,^1/_2=^3/_4=0.75$ el cual escogemos por ser es más cercano al número inicial. Los siguientes números serían $^3/_4\,^3/_2 = ^9/_8 = 1.125$, $^9/_8\,^3/_2\,^1/_2 = ^{27}/_{32} = 0.84375$, etc. De esta forma, generaríamos una serie de notas cada una de las cuales armoniza con la anterior y con la siguiente. La idea es cortar esta secuencia cuando regresemos a la nota inicial.

La fig. 1 muestra la frecuencia relativa de las notas generadas por esta secuencia. Vea cómo a pesar de que la secuencia de notas consecutivas sube y baja en aparente desorden, se forman conjuntos de notas que se podrían unir por curvas suaves. Fíjese también que algunas notas se acercan mucho a la nota inicial, correspondiente a la línea horizontal.

En la fig. 2 se muestra cuánto le falta a las notas de esta secuencia para que su frecuencia sea igual a la de la nota inicial (*1*). Notamos en la figura que esta secuencia *nunca* terminaría pues nunca se regresa exactamente a la nota inicial, lo cual correspondería a una diferencia nula. Por otro lado, notamos que la diferencia de frecuencias con la nota inicial es una función que sube y baja caprichosamente, pero con ciertos *números mágicos* que minimizan la diferencia. Por ejemplo, la nota número 3 que difiere de la nota inicial en *1⁄8*, mientras que la nota que la antecede y las dos que le siguen difieren por más. Esto sugiere *truncar* la escala en la tercera nota y quedarnos con sólo dos notas, la nota inicial y su quinta. Esta escala es simple y agradable, con dos intervalos que forman una quinta y una cuarta exactas, pero es una escala algo pobre. Si queremos una escala mejor, tendríamos que cerrarla cuando hallemos una nota que se acerque más a la inicial que la nota 3. En la figura vemos que ésta, la segunda nota mágica, sería la número 6, lo cual nos dejaría la llamada escala *pentatónica* con cinco notas, correspondiente a las teclas negras en un piano. La nota 8 es casi una nota mágica, y conduciría a una escala de siete notas llamada *diatónica*, correspondiente a las notas blancas del piano. El siguiente número mágico es el 13, correspondiente a la escala de 12 notas llamada *cromática*, en la cual se

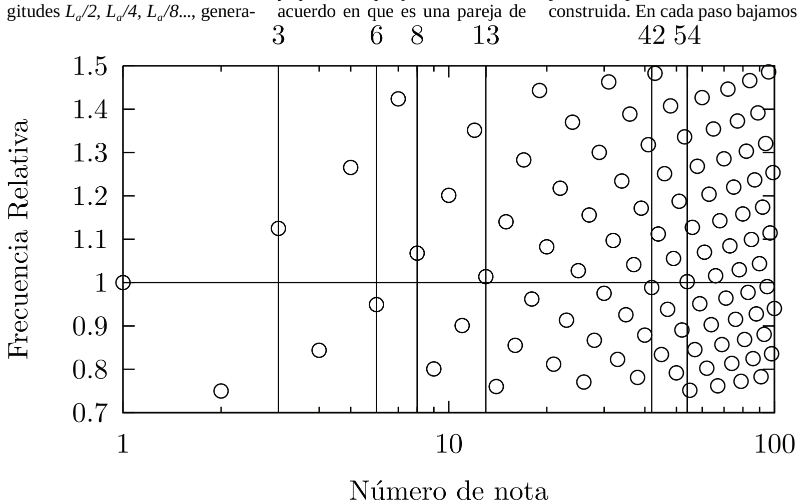

Fig. 1. Frecuencias relativas a la nota inicial para una escala construida mediante quintas iteradas. Se indican la nota inicial (línea horizontal) y las notas que se acercan a la nota inicial más que sus antecesoras (líneas verticales).

ACADEMIA DE CIENCIAS DE MORELOS, A.C.

¿Comentarios y sugerencias?, ¿Preguntas sobre temas científicos? CONTÁCTANOS:
edacmor@ibt.unam.mx

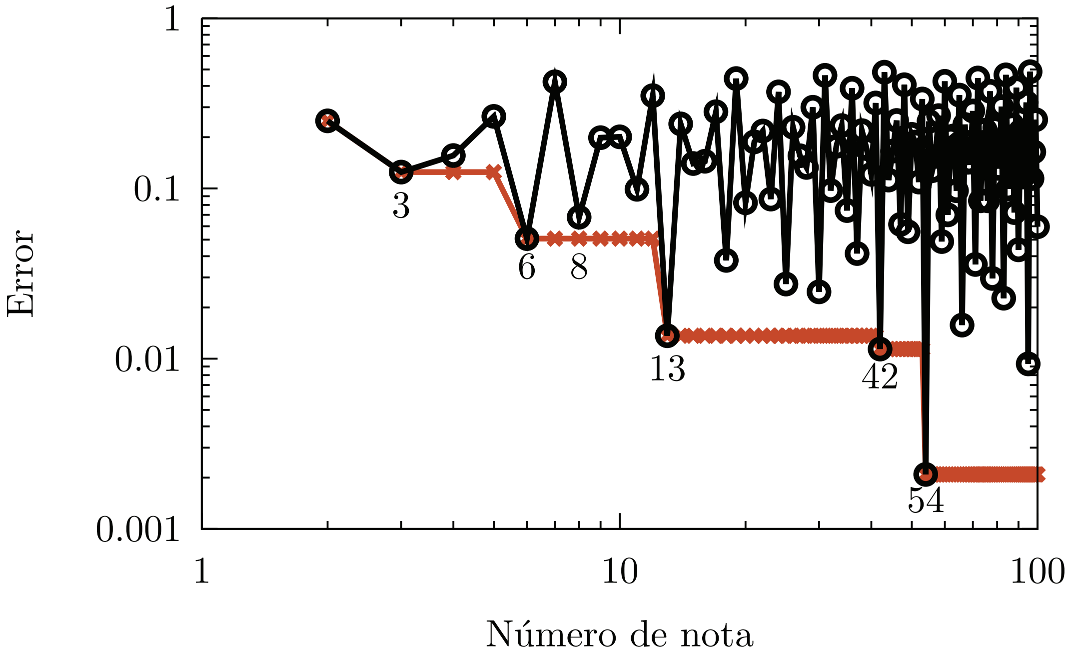

Fig. 2. Cuánto le falta a cada nota de una secuencia de quintas para regresar a la nota inicial (línea negra con círculos) y errores mínimos cometidos al truncar la secuencia (línea roja con cruces). Note que la escala vertical es *logarítimica*, al igual que la horizontal.

basa la mayor parte de la música contemporánea. Si quisiéramos ir más allá de doce notas, los números mágicos 42 y 54 sugieren escalas de 41 y 53 notas. Los siguientes números mágicos son 307, 666 y 15602, correspondientes a escalas con 306, 665 y 15601 notas, con intervalos entre notas sucesivas tan pequeños que no los puede detectar el oido humano.

El problema con el procedimiento descrito arriba es que *no se cierra* de manera exacta. Por lo tanto, el intervalo entre la última y la primera nota no es una quinta, como el intervalo entre todas las demás parejas de notas sucesivas; la escala *tiene un error.* Si queremos corregir ese error cambiando la frecuencia de la última nota, introduciríamos un error en el penúltimo intervalo; si corrigiésemos ése, introduciríamos un error en el que le antecede y así sucesivamente. Ha habido cientos de propuestas para distribuir el error entre todas las notas restantes, proceso que se conoce como *temperar la escala*. La más moderna corresponde al llamado *temperamento uniforme*, que distribuye el error uniformemente entre todas las notas de la escala cromática, modificando la fracción $^3/_2=1.5$ por el número irracional $2^{7/12}=1.4983...$ de forma que el intervalo entre dos notas consecutivas sea $2^{1/12}=1.05946....$ Si empezamos con un La de frecuencia $f^{La}=440Hz$, su quinta tendría una frecuencia $f^{Mi}=659.255Hz$. ¿Cuál es el problema? Que el segundo armónico de Mi tendría una frecuencia de *1318.5Hz*, la cual difiere en $\Delta f=1.5Hz$ *de 1320Hz*, el tercer armónico de La. Peor aún, su tercera tendría una frecuencia $f^{Do\#}=554.36Hz$, cuyo cuarto armónico, de frecuencia *2217.5Hz* difiere en $\Delta f=17.5Hz$ del quinto armónico de La, de frecuencia *2200Hz*. Cuando dos sonidos tienen frecuencias que difieren un poco, como las de estos armónicos, el oido las confunde y escucha una sola frecuencia pero con un volumen que no es uniforme sino que aumenta y disminuye periódicamente con frecuencia Δf. Estas oscilaciones en el volumen de algunos armónicos de algunos pares de notas se conocen como batimientos, los cuales de acuerdo a su frecuencia, pueden ser muy desagradables. Puede escuchar batimientos al pulsar la misma nota en dos cuerdas de guitarra a la vez que desafina gradualmente una de ellas.

Como se ilustra en este artículo, resulta imposible temperar una escala musical de manera que no haya batimentos; toda escala musical tiene errores. El temperamento uniforme conduce a una escala en que los errores están distribuidos entre todas las notas. Eso significa que *ninguno de sus intervalos es perfecto* y todos tienen errores y batimentos. Antes había intervalos perfectos e intervalos muy defectuosos; ahora todos los intervalos son malos pero no demasiado [2] (aunque hay quien los considera intolerables [3]). Esto significa que los músicos modernos no pierden mucho al explorar nuevos intevalos que con las afinaciones antiguas hubiesen sonado terriblemente mal. Esto les ha dado una gran libertad con la que no contaban los músicos en la época clásica. No hay mal que por bien no venga, pero ¿lo he convencido? ¿Verdad que es imposible no ser desafinado?

Bibliografía

[1] W. Luis Mochán, *Usted es Desafinado (parte 1 de 2)*, periódico *La Unión de Morelos*, 5 de septiembre de 2011, p. 31.

[2] Hermann von Helmholtz, *On the Sensation of Tone* (Dover Publications, 2nd ed., 1954).

[3] Ross W. Duffin, *How Equal Temperament Ruined Harmony (and Why You Should Care)* (W. W. Norton, 2006).