ACADEMIA DE CIENCIAS DE MORELOS, A.C.

¿Comentarios y sugerencias?, ¿Preguntas sobre temas científicos? CONTÁCTANOS: editorial @acmor.org.mx

Abejas matemáticas

W. Luis Mochán
Instituto de Ciencias Físicas, UNAM
Miembro de la Academia de Ciencias de Morelos
mochan@fis.unam.mx

Dios hizo los números naturales; el resto es obra del hombre.
Leopold Kronecker (1823-1891).

Imagine que aborda un autobús para regresar a casa después de una excursión escolar. El profesor del grupo quiere asegurarse que el grupo esté completo. —*Enumérense*, ordena. —*Uno*, *dos*, *tres*… contestan de uno en uno los alumnos, *naturalmente*. Esos números, 1, 2, 3, 4, 5… son conocidos como los números naturales (ver referencia [1]). Son los que usamos para contestar preguntas como *—¿cuántos cacahuates quedan en la bolsita? —quedan 15.*

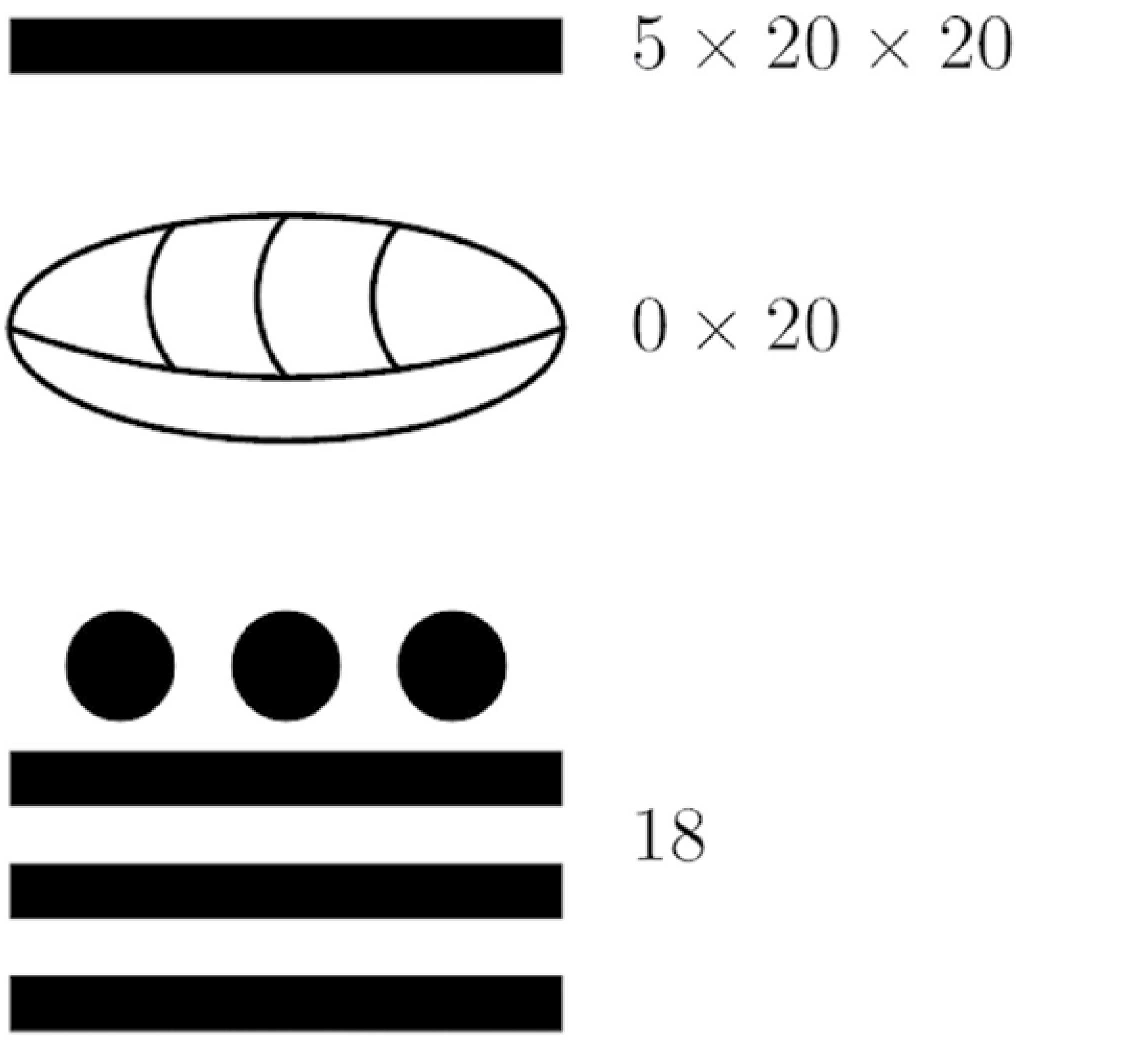


FIGURA 1. El número 2018 en notación maya. Los dígitos consisten del número cero, representado por una concha de molusco cerrada y los demás dígitos son barras y puntos, donde cada punto vale por una unidad, cada barra vale por cinco unidades y hay una notación posicional en que se multiplica por 20 el valor de cada dígito al subir un nivel.

Hay otros números que de naturales no tienen nada, y que requieren un gran esfuerzo e ingenio por parte de los profesores para que sus alumnos los entiendan. Por ejemplo, para enseñar números negativos podría plantearse el siguiente problema: —*tienes un plato con dos tostadas, me regalas tres de ellas, ¿cuántas tostadas te quedan?* La respuesta natural sería: *—no se puede, si sólo tengo dos tostadas no te puedo regalar tres, pues tres es mayor que dos.* Sin embargo, el profesor puede cambiar de estrategia y preguntar *—si una ranita saltarina da dos saltos hacia la derecha y luego tres saltos hacia la izquierda, a donde llega*, cuya respuesta podría ser *—llega al mismo lugar al que llegaría de dar 2-3=-1 saltos a la derecha, es decir un salto, pero hacia la izquierda.* Así, saltos hacia la izquierda pueden interpretarse como saltos *negativos* hacia la derecha. Con este ejemplo, nuestros profesores pudieron intentar hacernos entender los números enteros, que incluyen a los números negativos además de los números positivos, *…-5, -4, -3…3, 4, 5…*

Más complicado aún es describir los números fraccionarios, *—si invitas a cinco amigos a celebrar tu cumpleaños y tienes un pastel, ¿cuánto pastel le toca a cada uno?* y las operaciones entre ellos: *— si divides tres cuartos entre cinco sextos, a cada uno le toca…* Mucho peores aún serían los números *irracionales* que no se pueden escribir como fracciones, cuyo descubrimiento atribuido a *Hípaso de Metaponto* [2], fue interpretado por los seguidores de *Pitágoras* como un error de los dioses que debía guardarse en secreto, o los números *complejos* que incluyen a los *imaginarios* cuyo cuadrado es negativo [3], en lugar de ser positivo, como sucede para los números *reales* y decentes.

Sin embargo, dentro de todos los sistemas matemáticos que ha construido el hombre hay un número que podría parecer el más humilde y sencillo de todos, pero que en verdad es excepcional y de enorme importancia. Este es el número *cero* [4] Este número es tan relevante que los matemáticos lo consideran uno más de los números naturales, el primero de ellos. Muchas demostraciones matemáticas se simplifican mucho si uno llama números naturales a 0, 1, 2, 3, 4… en lugar de sólo del uno en adelante. El cero además permitió inventar la *notación posicional* [5], la cual permite escribir de manera compacta números arbitrariamente grandes y chicos, y permite desarrollar *algoritmos* sencillos para hacer operaciones matemáticas. Compare Ud. el año actual, 2018, escrito con nuestro sistema posicional, heredado de la antigua Babilonia, con el mismo número escrito en el sistema romano MMXVIII. Ahora intente multiplicar dos números fraccionales como 3.14 y 1.41 usando la notación decimal y compárelo con la misma multiplicación empleando números romanos (para lo cual tendrá, antes que nada, que ingeniárselas para escribir los números fraccionales).

Hay evidencia de que el cero fue inventado por los egipcios en el siglo XIX AC, pero sin emplear una notación posicional. El símbolo para representar al cero era un corazón unido a una tráquea. Por otro lado, los babilonios inventaron la notación posicional alrededor del siglo XVII AC empleando la base sesenta; recorrer un dígito un lugar a la izquierda equivalía a multiplicar por sesenta. Así, 2018 se escribiría como (símbolo correspondiente a 33)(símbolo correspondiente a 38) pues 2018=33×60+38. Sin embargo, no tenían un símbolo para denotar al cero y simplemente lo representaban mediante un espacio vacío. La evidencia más antigua del uso del cero para denotar una cantidad nula viene de un tratado astronómico y matemático, el Almagesto, escrito por Ptolomeo en el año 130. Hay evidencias del uso del cero en India en un texto de cosmología escrito en el siglo V. Las reglas de la notación decimal se desarrollaron entre el siglo V y VI y fueron transmitidas a la cultura árabe en el siglo IX e incorporadas en el libro de astronomía de Al-Juarismi [6] (de cuyo nombre se deriva la palabra *algoritmo*)

Durante el siglo XI, el cero se incorporó a la cultura europea junto con los números indoarábigos gracias al matemático italiano, Leonardo de Pisa, conocido como *Fibonacci*, quien escribió con fascinación cómo con los signos: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 y 0, bastaban para escribir cualquier número.

El cero ha sido descubierto varias veces de manera independiente. Así, los mayas en el siglo I AC usaban una notación posicional que empleaba el cero y una base vigesimal [7]. Así, 2018 se escribiría de arriba hacia abajo como (símbolo del 5)(símbolo del 0)(símbolo del 18) pues 2018=5×20×20+0×20+18 (ver figura 1). Es probable que los olmecas desarrollaran dicha notación aún antes.

Lo que ilustran los párrafos anteriores es que a la humanidad le costó mucho tiempo y trabajo comprender y aprovechar el sutil concepto de *cero*. ¿Es el cero una *cantidad*? ¿Cómo puede *nada* ser *algo*? ¿Puedo comparar cero con algo? ¿Es lo mismo decir *no tengo* dinero a decir *tengo* cero pesos? Es por los motivos anteriores que me sorprendió mucho leer hace un par de días que *Science*, una de las revistas de ciencia más prestigiadas del mundo, publicó un artículo sobre una investigación científica en la que se concluye que las abejas *comprenden el concepto de cero*. Igual de sorprendente es que un equipo de investigadores puedan saber cuáles conceptos sí entiende una abeja y cuáles no. Leí con mucha curiosidad el artículo (ver referencia [8]) y una reseña del mismo [9].

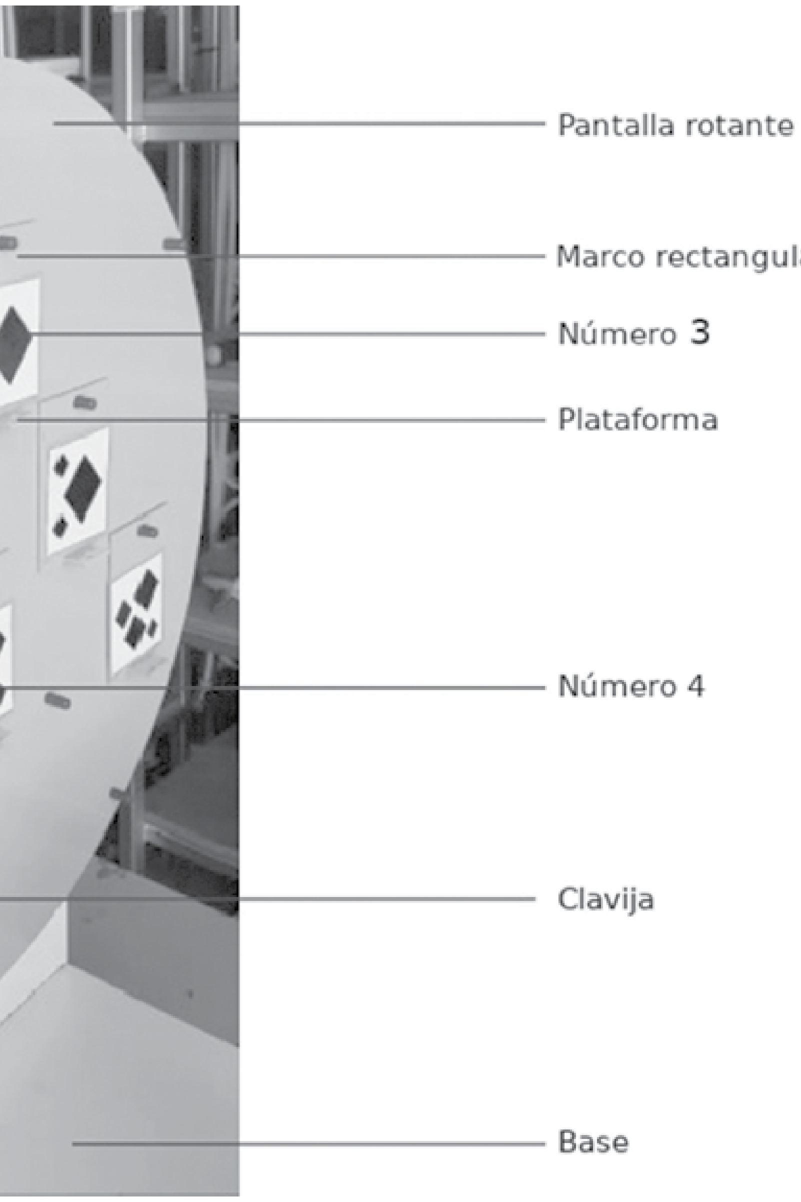
Resulta que un grupo de cinco investigadores de Australia y Francia *entrenaron* a unas abejas a reconocer los conceptos de *'más que'* y *'menos que'* mediante un arreglo muy ingenioso. Diseñaron una pantalla rotante de medio metro de diámetro con clavijas de donde se podían colgar en diversas posiciones unos marcos rectangulares con un *estímulo* consistente de una tarjeta blanca de 6cm×6cm donde se habían pintado cierto número de elementos negros, ya fueran

Figura 2. Sistema empleado para estudiar conceptos numéricos en abejas. Se muestra una pantalla rotante con clavijas de donde cuelgan marcos rectangulares con tarjetas blancas en que se han impreso cierto número de figuras. Cada marco tiene una plataforma en que se puede posar una abeja y beber una solución con agua con quinina, sacaros o sola.

ACADEMIA DE CIENCIAS DE MORELOS, A.C.

¿Comentarios y sugerencias?, ¿Preguntas sobre temas científicos? CONTÁCTANOS: editorial @acmor.org.mx

Academia de Ciencias de Morelos, A.C.



cuadrados, rombos o círculos, de tamaños diversos. En cada marco había una plataforma donde se podría posar una abeja y consumir unas gotas de agua con otras sustancias (véase la figura 2). En uno de los experimentos se escogieron al azar dos números distintos cada uno entre 1 y 4, digamos, para ser concretos, 2 y 3. De dos clavijas escogidas al azar se colgaron entonces dos marcos cuyas tarjetas tenían 2 rombos cada una y de otras dos se colgaron dos cuadros con 3 rombos cada uno. En las plataformas correspondientes a dos rombos había una solución de quinina, un desagradable líquido amargo, mientras que en las correspondientes a tres rombos había una solución de sacarosa (el azúcar que consumimos regularmente), un agradable líquido dulzón. De esta manera, la abeja que se posara junto a los 2 rombos recibiría un *castigo* al beber y la que se posara junto a los 3 rombos recibiría un *premio*. Para cada abeja se repitió este tipo de experiencia decenas de veces pero con distintas parejas de números como 1 y 2, 1 y 3, 1 y 4, 2 y 4, etc. Invariablemente, se le ofrecía un premio a la abeja cuando escogía al mayor de los dos números y un castigo al escoger el menor. Las abejas fueron entrenadas con dos tipos de figuras, por ejemplo rombos y cuadrados. Tras estas repeticiones, las abejas aprendieron que de cualesquiera dos estímulos, el premio estaría junto al que tuviera el mayor número de figuras. Una vez que las abejas hubieron aprendido, es decir, que escogieron mayoritariamente el estímulo con el mayor número de figuras, se les presentaron parejas de figuras distintas, por ejemplo, con círculos, y con agua en ambas figuras, en lugar de quinina o sacarosa. A pesar de haber sido entrenadas con cuadrados y rombos, y que los nuevos estímulos no llevaban premios ni castigos, las abejas fueron capaces de preferir significativamente el estímulo con el mayor número de círculos. Durante el experimento se variaron las disposiciones geométricas de las figuras y se mantuvo el área total cubierta de negro en cada estímulo para descartar cualquier otro atributo que pudiera haber guiado a las abejas, más allá del número de figuras. Se demostró así que las abejas podían comparar cantidades de figuras y elegir el cuadro que tuviera la mayor cantidad, es decir, de algún modo se mostraron capaces de comprender el concepto de número y el de *mayor que*. De manera análoga, otro conjunto de abejas fue entrenado para aprender el concepto de *menor que* y elegir el estímulo con menos figuras, aunque las figuras y su disposición les fueran desconocidas y que ya no hubiera más premios ni castigos asociados (ver la figura 3).

Una vez entrenadas, se les presentaron de nuevo parejas de estímulos. Una de las parejas correspondían a los números 2 o 3. La otra de las parejas correspondía a 0 elementos, es decir, a una tarjeta totalmente blanca, o a 5 elementos. Los números 0, 5 *no habían sido empleados* en la fase de entrenamiento. Las abejas entrenadas a preferir un *mayor* número de elementos, prefirieron al 2 y al 3 sobre el 0, y las abejas entrenadas a preferir un *menor* número prefirieron al 2 y al 3 sobre el 5. Esto no parece ser muy conclusivo, pues fueron entrenadas a elegir estímulos que tenían entre 1 y 4 elementos y nunca habían visto figuras con 0 ni con 5. Sin embargo, las abejas entrenadas a elegir un mayor número de elementos prefirieron al 5 sobre el 2 y el 3, mientras que las abejas entrenadas a elegir un *menor* número de elementos prefirieron los estímulos con 0 figuras sobre los estímulos con 2 o 3 figuras. Esto indica que aunque nunca antes habían visto una tarjeta con 5 elementos, las primeras abejas entendieron que 5 es mayor que 2 y que 3, mientras que las segundas, que nunca habían visto una tarjeta blanca, reconocieron que tenía un menor número de elementos que las otras tarjetas y la prefirieron con la expectativa de obtener un premio. Entonces, 0 corresponde a un concepto que se puede comparar con otros conceptos como son los correspondientes a los números 2 y 3 (ver figura 3).

Se llevaron a cabo muchos otros experimentos ingeniosos. En uno de ellos se entrenó a un grupo de abejas a escoger el estímulo con menos figuras usando únicamente parejas de números entre 2 y 5. En pruebas subsiguientes, dichas abejas no tuvieron preferencia entre el número 0 y el número 2, pues aunque 0 es menor que 2, el número 2 siempre fue recompensado durante el entrenamiento. Habría razón para preferir uno u otro número. Sin embargo, dichas abejas prefirieron significativamente al 0 sobre el 1, a pesar de que no habían sido entrenadas con ninguno de dichos números. Claramente, las abejas distinguen entre el 1 y el 0 y saben cuál de ellos es menor. Otro experimento mostró que las abejas cometen ocasionalmente errores, pero cometen más al comparar 0 con otro número mientras más pequeño sea el otro número, o sea, que tienen una noción de distancia entre el cero y los demás números, y experimentos adicionales mostraron que las abejas prefieren *malo por conocido que bueno por conocer*, descartando así que hubieran elegido al 0 por novedoso y no por ser menor a los demás números naturales.

Estos cuidadosos experimentos demuestran que las abejas entienden a un conjunto vacío como aquel que tiene 0 elementos, y que ésta es una cantidad numérica que se puede comparar con otros números. Los resultados son particularmente espectaculares, dado que la rama evolutiva que dio origen a las abejas divergió de la que dio origen al hombre hace más de 600 millones de años y que el sistema nervioso de las abejas tiene cien mil veces menos neuronas que el nuestro.

Es sensacional que podamos contestar preguntas como las que responde este experimento, sobre conceptos numéricos en seres tan distintos a nosotros. Otro experimento del cual les contaré en otra ocasión ha servido para averiguar en qué piensan las aves cantoras mientras duermen. Esta clase de trabajos muestra lo extraordinario que pueden ser los resultados obtenidos de experimentos relativamente sencillos cuando estos son cuidadosamente planeados, desarrollados y analizados.

Agradecimientos

Este trabajo fue parcialmente apoyado por DGAPA-UNAM mediante el proyecto IN113016. Agradezco a Luis Aguilar el señalarme el artículo sobre las abejas.

Bibliografía

Número natural, Wikipedia, http://bit.ly/2y0Jo5y .
Hípaso de Metaponto, Wikipedia, http://bit.ly/2JqDqAix .
Número complejo, Wikipedia, http://bit.ly/2HzDJ5K .
Cero, Wikipedia, http://bit.ly/2JD3UxN .
Notación posicional, Wikipedia, http://bit.ly/2xYDLon .
Al-Juarismi, Wikipedia, http://bit.ly/2JsEkbk .
Numeración maya, Wikipedia, http://bit.ly/2sT8PQM .
Scarlett R. Howard, Aurore Avarguès-Weber, Jair E. Garcia1, Andrew D. Greentree y Adrian G. Dyer, *Numerical ordering of zero in honey bees*, *Science* **360** 11241126 (2018) https://doi.org/10.1126/science.aar4975 .
Andreas Nieder, *Honey bees zero in on the empty set*, *Science* **360** 1069 (2018) https://doi.org/10.1126/science.aat8958 .

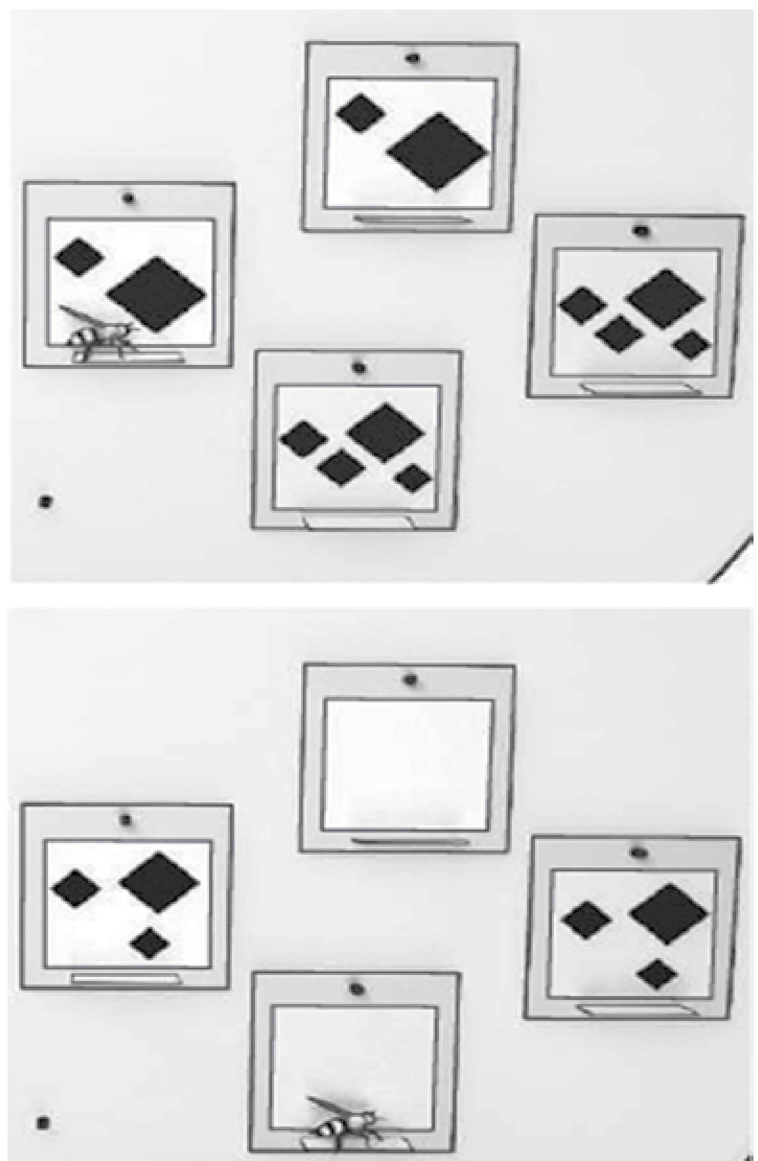


Figura 3. Panel superior: Una abeja siendo entrenada a reconocer la relación *menor que*, posándose junto a una figura con dos cuadrados en lugar de una con cuatro cuadros, y recibiendo un premio por su elección. Panel inferior: La misma abeja ya entrenada, escogiendo una figura sin cuadros pues cero es menor que tres, aunque no hubo figuras vacías durante su entrenamiento y no hay premio asociado.